

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра прикладної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Декан факультету
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ

“29” серпня 2024 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Методи оптимізації

рівень вищої освіти _____ перший (бакалаврський) рівень _____

галузь знань _____ 11 – Математика та статистика _____

спеціальність _____ 113 Прикладна математика _____

освітня програма _____ Прикладна математика _____

спеціалізація _____

вид дисципліни _____ обов'язкова _____

факультет _____ математики і інформатики _____

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження Вченою радою факультету математики і інформатики

“27” серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ: **Ревіна Тетяна Володимирівна**, канд. фіз.-мат. наук, доцент закладу вищої освіти кафедри прикладної математики.

Програму схвалено на засіданні кафедри прикладної математики
Протокол від “26” серпня 2024 року № 8

Завідувач кафедри прикладної математики



Валерій КОРОБОВ

Програму погоджено з гарантом
освітньо-професійної програми «Прикладна математика»

Гарант освітньо-професійної програми «Прикладна математика»



Сергій ПОСЛАВСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією
факультету математики і інформатики

Протокол від “27” серпня 2024 року № 1

Голова науково-методичної комісії факультету математики і інформатики



Євген МЕНЯЙЛОВ

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «**Методи оптимізації**» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавра спеціальності 113 – Прикладна математика

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Мета викладання навчальної дисципліни

Метою викладання навчальної дисципліни є навчання майбутніх спеціалістів формалізувати математичні задачі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв'язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами.

1.2. Основні завдання вивчення дисципліни:

оволодіння майбутніми спеціалістами методиками вибору раціональних методів та алгоритмів розв'язання математичних задач оптимізації, уміння отримувати змістовні висновки.

1.2.1. Формування наступних інтегральної та загальних компетентностей

ІК01. Здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми прикладної математики у професійній діяльності або у процесі навчання, що передбачає застосування математичних теорій та методів і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

ЗК02. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

1.2.2. Формування наступних фахових компетентностей

ФК01. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем.

ФК02. Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі.

ФК03. Здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язання прикладних задач, моделювання, аналізу, проектування, керування, прогнозування, прийняття рішень.

ФК14. Здатність сформулювати математичну постановку задачі, спираючись на постановку мовою предметної галузі, та обирати метод її розв'язання, що забезпечує потрібні точність і надійність результату.

ФК18. Здатність оцінити рівень математичного обґрунтування методів, які застосовуються для розв'язання конкретних прикладних задач.

1.3. Кількість кредитів – 3

1.4. Загальна кількість годин – 90

1.5. Характеристика навчальної дисципліни

Обов'язкова	
Денна форма навчання	Заочна(дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
2-й	
Семестр	
3-й	
Лекції	

16 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
—	
Самостійна робота	
42 год.	
в тому числі індивідуальні завдання	
6 год.	

1.6. У результаті вивчення даного курсу студент повинен

знати:

- класичні задачі оптимізації та методи їх розв'язання;
- типові задачі математичного програмування та методи їх розв'язання;
- методи розв'язання задачі лінійного програмування;
- методи розв'язання транспортної задачі;

уміти:

- формалізувати оптимізаційні моделі;
- застосовувати метод найменших квадратів;
- застосовувати метод динамічного програмування;
- застосовувати геометричний метод та симплекс-метод для розв'язання задачі лінійного програмування;
- застосовувати алгоритми розв'язання транспортної задачі.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є навчання формалізувати математичні задачі та вивчення методів розв'язання класичних задач оптимізації, задач лінійного програмування та транспортної задачі.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні досягти таких програмних результатів навчання:

РН01. Демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці.

РН03. Формалізувати задачі, сформульовані мовою певної предметної галузі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв'язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами, оцінювати точність та достовірність отриманих результатів.

РН05. Уміти розробляти та використовувати на практиці алгоритми, пов'язані з апроксимацією функціональних залежностей, чисельним диференціюванням та інтегруванням, розв'язанням систем алгебраїчних, диференціальних та інтегральних рівнянь, розв'язанням крайових задач, пошуком оптимальних рішень.

РН10. Володіти методиками вибору раціональних методів та алгоритмів розв'язання математичних задач оптимізації, дослідження операцій, оптимального керування і прийняття рішень, аналізу даних.

РН22. Уміти отримувати змістовні висновки, наводити та аналізувати приклади і контрприкладів, перевіряти і обґрунтовувати правильність застосованих міркувань і отриманих розв'язків.

2. Тематичний план навчальної дисципліни.

Розділ 1. Класичні задачі оптимізації і методи їх розв'язання.

Тема 1. Класичні задачі оптимізації і методи їх розв'язання.

- Постановка оптимізаційної моделі: змінні, цільова функція, обмеження. Переваги та недоліки оптимізаційних моделей. Типи задач – дискретна оптимізація, неперервна оптимізація.
- Функції багатьох змінних. Лінії рівня. Часткові похідні. Необхідна умова екстремуму (теорема Ферма).
- Метод найменших квадратів знаходження функціональної залежності між змінними. Приклад: лінійна і квадратична залежність.
- Задача відокремлення двох класів лінійною гіперплощиною – Support Vector Machine. Приклад: Iris flower dataset.
- Метод динамічного програмування. Геометрична та економічна інтерпретація задач. Принцип оптимальності Белмана. Багатокроковий процес прийняття рішень. Приклад: задача «золота гора», задача про рюкзак, задача про розподіл ресурсів.

Розділ 2. Абстрактна теорія лінійного програмування.

Тема 2. Введення в задачі лінійного програмування (ЛП).

- Типові задачі математичного програмування: задача про розкрій матеріалів, задача виробничого планування, задача про суміші, задача про призначення, задача оптимального розміщення, задача про розподіл ресурсів, задача про перевезення, задача про три верстати (задача Джонсона), задача комівояжера.
- Загальна форма задачі ЛП та її інтерпретація в n-вимірному просторі.
- Властивості задач ЛП. Стандартна форма задачі ЛП. Нормальна форма задачі ЛП: основна екстремальна властивість кутових точок множини допустимих розв'язків.
- Методи побудови канонічної форми задачі ЛП: метод штучних змінних. Метод Жордана-Гауса.
- Структура множини оптимальних розв'язків.
- Цілочислові задачі ЛП. Постановка цілочислових задач ЛП. Економічна та геометрична інтерпретація.
- Задачі дробово-лінійного програмування.
- Багатокритеріальні задачі ЛП.

Тема 3. Методи розв'язку задач ЛП.

- Геометричний метод для розв'язування задач ЛП.
- Симплексний алгоритм для розв'язування задач ЛП.
- Табличний симплекс метод. Напряний рядок і напряний стовпчик.
- Програмування симплексного алгоритму мовою Python.
- Виродженість і зациклювання у задачах ЛП.
- Принцип двоїстості в задачах ЛП. Зв'язок між розв'язками прямої і двоїстої задач. Двоїстий та змішаний алгоритм розв'язування задачі ЛП.
- Цілочислові задачі ЛП. Метод Гоморі визначення оптимального плану задачі цілочислового ЛП. Метод гілок і границь визначення оптимального плану задачі цілочислового ЛП.

- Задачі дробово-лінійного програмування та методи їх розв'язання.
- Багатокритеріальні задачі ЛП та методи їх розв'язання: метод головної компоненти, метод комплексного критерію, лексикографічний метод, метод поступок, метод ідеальної точки, метод умовного центра мас.

Розділ 3. Транспортна задача.

Тема 4. Транспортна задача та методи її розв'язання.

- Постановка різних типів транспортних задач. Задача оптимізації вартості прокладанні кабелю.
- Зведення задач з неправильним балансом до задач із правильним балансом.
- Методи знаходження початкового опорного плану: метод північно-західного кута (NWCM), метод мінімального елемента (метод найменших витрат LCM), метод подвійної переваги, метод апроксимації Фогеля (VAM). Приклади знаходження початкового опорного плану.
- Методи знаходження оптимального плану: метод потенціалів, метод диференціальних рент, метод циклів. Приклади розв'язування транспортних задач.
- Угорський метод розв'язання транспортних задач.
- Транспортна задача за критерієм часу та методи її розв'язання.
- Транспортна задача в мережевій формі і методи її розв'язання.
- Задача про перевезення і методи її розв'язання.
- Комп'ютерне моделювання транспортних задач за допомогою електронних таблиць.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви модулів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	Усього	у тому числі				
Л		п	лаб	інд	ср	
1	2	3	4	5	6	7
Розділ 1. Класичні задачі оптимізації і методи їх розв'язання.						
Тема 1. Класичні задачі оптимізації і методи їх розв'язання.	16	2	6			8
<i>Індивідуальне завдання</i>	6					6
Разом за розділом 1	22	2	6			14
Розділ 2. Абстрактна теорія лінійного програмування.						
Тема 2. Введення в задачі лінійного програмування	15	3	4			8
Тема 3. Методи розв'язку задач ЛП.	20	4	8			8
Разом за розділом 2	35	7	12			16
Розділ 3. Транспортна задача.						
Тема 4. Транспортна задача та методи її розв'язання.	29	7	10			12
<i>Контрольна робота</i>	4		4			
Разом за розділом 3	33	7	14			12
Усього годин	90	16	32			42

4. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Функції багатьох змінних. Лінії рівня. Часткові похідні. Необхідна умова екстремуму (теорема Ферма).	2
2	Метод найменших квадратів знаходження функціональної залежності між змінними. Приклад: лінійна і квадратична залежність.	2
3	Метод динамічного програмування. Геометрична та економічна інтерпретація задач.	2
4	Загальна форма задачі ЛП та її інтерпретація в n-вимірному просторі. Еквівалентні перетворення до стандартної та нормальної форми. Геометрична інтерпретація задачі ЛП	2
5	Канонічна форма задачі ЛП: метод Жордана-Гауса перетворення канонічних форм та канонічних розв'язків	1
6	Метод штучних змінних перетворення стандартної форми до канонічної форми	1
7	Геометричний метод для розв'язування задач ЛП	2
8	Симплекс метод для розв'язування задач ЛП	2
9	Табличний симплекс метод. Напрячний рядок і напрячний стовпчик.	1
10	Програмування симплексного алгоритму мовою Python.	1
11	Застосування принципу двоїстості до розв'язання задач лінійного програмування.	2
12	Постановка різних типів транспортних задач. Задача оптимізації вартості прокладанні кабелю.	2
13	Зведення задач з неправильним балансом до задач із правильним балансом.	1
14	Методи знаходження початкового опорного плану: метод північно-західного кута (NWCM), метод мінімального елемента (метод найменших витрат LCM). Приклади знаходження початкового опорного плану	3
15	Методи знаходження оптимального плану: метод потенціалів, метод циклів, метод диференціальних рент. Приклади розв'язування транспортних задач	4
16	Написання та захист контрольної роботи	4
	Разом	32

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Ознайомитися з оптимізаційними моделями	2
2	Задача відокремлення двох класів лінійною гіперплощиною – Support Vector Machine. Пример: Iris flower dataset.	2
3	Розібрати типові задачі динамічного програмування: задача «золота гора», задача про рюкзак, задача про розподіл ресурсів.	4
4	Розібрати типові задачі математичного програмування: задача про розкрій, задача виробничого планування, задача про дієту, задача про призначення, задача оптимального розміщення, задача про розподіл ресурсів, задача про перевезення, задача про три	6

	верстати (задача Джонсона), задача комівояжера.	
5	Ознайомитися з постановками цілочислових задач ЛП та їх економічною та геометричною інтерпретацією	1
6	Ознайомитися з задачами дробово-лінійного програмування.	1
7	Боротьба з виродженістю і зациклюванням у задачах ЛП.	1
8	Ознайомитися зі змішаним алгоритмом розв'язування задачі ЛП	1
9	Розібрати метод Гоморі визначення оптимального плану задачі цілочислового ЛП	1
10	Розібрати метод гілок і границь визначення оптимального плану задачі цілочислового ЛП	1
11	Ознайомитися з методами розв'язання задач дробово-лінійного програмування.	1
12	Ознайомитися з багатокритеріальними задачами ЛП та методами їх розв'язання. метод головної компоненти, метод комплексного критерію, лексикографічний метод, метод поступок, метод ідеальної точки, метод умовного центра мас.	3
13	Розібрати методи знаходження початкового опорного плану: метод подвійної переваги, метод апроксимації Фогеля (VAM).	2
14	Розібрати угорський метод розв'язання транспортних задач	2
15	Ознайомитися з транспортною задачею за критерієм часу та методами її розв'язання.	2
16	Ознайомитися з транспортна задачею в мережевій формі і методами її розв'язання	2
17	Ознайомитися з задачею про перевезення і методами її розв'язання.	2
18	Комп'ютерне моделювання транспортних задач за допомогою електронних таблиць.	2
	Разом	36

6. Індивідуальні завдання.

Приклади індивідуальних завдань:

1. Аркуш картону має форму прямокутника зі сторонами a та b . Вирізаючи по кутах цього прямокутника квадрати і згинаючи частини хрестоподібної фігури, що виступають, отримаємо відкриту зверху коробку, висота якої дорівнює стороні квадрата. Якою має бути сторона квадрата, щоб об'єм коробки був найбільшим?
2. З трьох дощок однакової ширини потрібно сколотити жолоб. При якому куті нахилу бокових стін площа поперечного перерізу жолоба буде найбільшою?
3. Знайти висоту правильної трикутної призми найбільшого об'єму, вписаної у кулю радіуса R .
4. Коло радіуса R розділений на два сегменти прямий, що віддаляється від центру кола на відстань h . Серед усіх прямокутників, вписаних у менший із цих сегментів, знайти прямокутник з найбільшою площею.
5. Знайти найбільший об'єм циліндра, периметр осевого перерізу якого дорівнює a .
6. Обчислити найбільший об'єм циліндра, повна поверхня якого дорівнює S .
7. Консервна банка має циліндричну форму. Знайти найбільш вигідні розміри банки, тобто визначити відношення діаметра основи до висоти циліндра, що має при заданій повній поверхні найбільший об'єм.

8. Яким має бути котел, що складається з циліндра, завершеного півсферами, зі стінками заданої товщини, щоб при даній місткості V на нього пішла найменша кількість матеріалу?

7. Методи навчання

- словесні (лекції, пояснення, навчальні дискусії)
- практичні (розв'язання задач)
- репродуктивний (розв'язання типових задач)
- пошуковий (індивідуальне завдання)
- методи узагальнення та конкретизації.

8. Методи контролю

- Контроль на практичних заняттях
- Контроль на лекціях
- проведення та перевірка контрольної роботи,
- перевірка індивідуального завдання,
- проведення заліку.

9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання							Залікова робота	Сума
Тема 1	Тема 2	Тема 3	Тема 4	Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Індивідуальне завдання	Разом		
3	3	3	3	33	15	60	40	100

Для допуску до складання підсумкового контролю (заліку) здобувач вищої освіти повинен набрати не менше 10 балів з навчальної дисципліни під час поточного контролю, самостійної роботи, індивідуального завдання.

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Нарахування балів:

Поточний контроль – до 12 балів,
 Контрольна робота – до 33 балів,
 Індивідуальне завдання – до 15 балів,
 Залікова робота – до 40 балів.

Поточний контроль: бали нараховуються за виконання домашніх завдань і активність під час практичних занять.

Контрольна робота оцінюється у 33 бали. Робота складається з 3 практичних задач.

Зміст контрольної роботи:

1. За допомогою методу найменших квадратів знайти лінійну і квадратичну залежність між змінними. Зробити геометричну інтерпретацію.
2. Розв'язати задачу лінійного програмування двома методами – геометрично і симплекс методом, перевірити за допомогою комп'ютера (онлайн калькулятор або мова програмування Python)

3. Розв'язати транспортну задачу: знайти початковий опорний план методом північно-західного кута або методом мінімального елемента, знайти оптимальний план методом потенціалів, або методом диференціальних рент.

Критерії оцінки по першому завданню:

- 7-8 – задача розв'язана до кінця, знайдено обидві залежності, можливі невеликі помилки,
 4-6 – задача розв'язана неповністю, знайдено тільки одну залежність або немає геометричної інтерпретації,
 0-3 – розв'язано менше половини задачі.

Критерії оцінки по другому завданню:

- 12-15 – задача розв'язана двома методами та перевірена за допомогою комп'ютера, можливі невеликі помилки,
 6-11 – задача розв'язана одним із методів, другий не доведено до кінця, немає перевірки за допомогою комп'ютера,
 0-5 – один із методів відсутній, немає доведеної до кінця відповіді у другому методу.

Критерії оцінки по третьому завданню:

- 8-10 – знайдено і початковий опорний план, і оптимальний план, можливі невеликі помилки,
 4-7 – знайдено тільки один із планів, другий не доведено до кінця,
 0-3 – знайдено неповністю тільки початковий план.

Індивідуальне завдання оцінюється у 15 балів. Критерії оцінювання:

- 12-15 – наведена правильна математична постановка задачі, правильний розв'язок аналітично і чисельно, зроблені правильні логічні висновки, можливі невеликі помилки,
 7-11 – допущені суттєві помилки у аналітичному розв'язанні, які привели до помилки у відповіді, або немає чисельного розв'язку, а в аналітичному все правильно,
 0-6 – допущено грубі помилки у математичній постановці задачі, що призвело до неправильного вибору методу розв'язку, чисельного розв'язку взагалі немає.

Залікова робота складається з трьох завдань і передбачає письмову відповідь на два теоретичних питання зі списку, який надається студентам заздалегідь, а також розв'язання практичної задачі.

Кожне теоретичне завдання оцінюється максимально 15 балами, задача – 10 балами.

По кожному завданню залікової роботи нараховується:

- максимальний бал у разі правильної обґрунтованої відповіді;
- за незначні помилки оцінка зменшується від 10 до 30 відсотків;
- за значні логічні помилки оцінка зменшується до 50 відсотків, якщо хід міркувань в цілому правильний;
- якщо відповідь не відповідає жодному з критеріїв – виставляється 0 балів.

Шкала оцінювання (дворівнева)

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка
50-100	зараховано
1-49	не зараховано

10. Рекомендована література

Основна література

1. Ващук Ф. Г., Лавер О. Г., Шумило Н. Я. Математичне програмування та елементи варіаційного числення. – 2008.
2. Грібова В. В. та ін. Конспект лекцій з дисципліни «Теорія ігор», розділ «Елементи лінійного програмування». – Одеса : Одеська політехніка, 2023. – 49 с.
3. Дослідження операцій. Конспект лекцій / Уклад.: О.І. Лисенко, І.В. Алексеєва, – К: НТУУ «КПІ», 2016. – 196 с.
4. Дослідження операцій. Навчально-методичний посібник / Уклад.: В. В. Онищенко – К: Державний університет телекомунікацій, 2016. – 44 с.
5. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. – Київ: Слово, 2006. – 804 с.
6. Зайченко О. Ю., Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. Збірник задач. – Київ: Слово, 2007. – 462 с.
7. Зелінський, Ю. Б. Транспортна задача. Київ: КСУ, 2004.
8. Лінійне програмування: практикум з дисципліни «Методи оптимізації»[Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика»/ Т. С. Ладогубець, О. Д. Фіногенов. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 61 с.
9. Рудавський Ю. К. та ін. Збірник задач з математичного аналізу. – Львівська політехніка, 2008. – 353 с.
10. Транспортна задача [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення»,/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. К. Молодід. – Електронні текстові дані – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 37 с.
11. Фіхтенгольц Г. М. Курс диференціального і інтегрального числення.
<https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net/>

Допоміжна література

1. Eiselt H. A., Sandblom C.-L. Linear programming and its applications. Springer Science & Business Media, 2007.
2. Murthy P. Rama. Operations research (linear programming). Bohem press, 2005.
3. Мартинюк П. М., Мічута О. Р. Методи оптимізації та дослідження операцій. – 2011.
4. Математичні методи дослідження операцій : підручник / Є. А. Лавров, Л. П. Перхун, В. В. Шендрік та ін. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 212 с.
5. Рогоза Н. А., Шульга Н. Г., Галаєва Л. В. Дослідження операцій. – 2015.

11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

<https://www.python.org/>

<https://www.pmc calculators.com/simplex-method-calculator/>